

スキー滑降の立体作図法

Three-dimensional diagram of ski sliding

佐橋 稔雄

抄録 スキー滑降は傾斜角 α の斜(雪)面上で行われる。そのスキーは斜面上で角付け角 β を作って滑降する。この β は斜面とスキーの間の角である。スキーの長さの方向と最大傾斜線FLの間の角はスキー角 δ である。スキー滑降軌道の接線方向とFLの間の角が θ である。従って、スキーは角 α と β と δ と θ の各傾きを含んだ傾きを伴って斜面上を滑降している。 α はスキー場で、角度計により測定される。 θ はスキー滑降図を描く事により求められる。水平角付け角 β_0 はスキー軌道から測定される。横斜面角 β_1 は α と θ から計算により求められる。 β は、 $\beta = \beta_0 + \beta_1$ から得られる。ここで、 θ と δ が等しい滑降がカービング・ターンと定義されている。そこで、カービング・ターン滑降の場合について、測定値 α と β と θ が与えられれば、滑降中のスキーが、或る方向から見た時、どのような傾きにあるかを立体的に知る事ができる作図法を開発した。

この方法により、スキーの前方(又は、任意の方向)から見た、スキー滑降の状態を紙面上に立体的に描く事ができる。それは、スキーが斜(雪)面上で、どのような角付けをして滑降しているかを、直接目で見ると相当している。これはスキー運動を研究する上で極めて大切な事である。

スキー滑降の立体作図法

佐橋 稔雄

Three-dimensional diagram of ski sliding

Toshio SAHASHI

Abstract

A ski slides on a (snow) slope with an inclination angle of α . The ski has an edging angle of β . Namely, β is the angle of the ski relative to the slope. The angle between the longitudinal direction of the ski and the fall line FL is defined as the ski angle δ . The angle between the tangential direction of the locus of the sliding ski and FL is denoted as θ . Therefore, a ski sliding on a slope involves the angle α, β, δ , and θ . α is measured using an angle gauge on a ski slope. The horizontal edging angle β_0 is also measured using an angle gauge on the track of the sliding ski on snow. θ is obtained by drawing a diagram of a sliding ski. The transversal inclination angle β_1 is calculated using α and θ . β is given as $\beta = \beta_0 + \beta_1$. A sliding ski with θ equal to δ is defined as undergoing a carving turn. We developed a method of three-dimensionally determining and drawing the state of a sliding ski during carving turns on the basis of the measured values of α, β , and θ . By this method, it is possible to three-dimensionally draw the state of a sliding ski viewed from the front of the ski (or from an arbitrary direction) on paper. This means that we can directly observe the edging of a ski sliding on a (snow) slope. This visual observation is very important in the study of skiing motion.

Keywords : ski, carving turn, ski descent, edging angle, three-dimensional diagram of a sliding ski,

1. 序文

スキー滑降は傾斜角 α の斜 (雪) 面上で行われる。そのスキーは斜面上で角付け角 β を作って滑降する。この β は斜面とスキーの間の角である。スキーの長さの方向と最大傾斜線 FL の間の角はスキー角 δ である。スキー滑降軌道の接線方向と FL の間の角が θ である。従って、スキーは角 α と β と δ と θ の各傾きを含んだ傾きを伴って斜面上を滑降している。このようなスキーを、空間の或る点から見た時、そのスキーがどのような傾きに見えるかを考える事は極めて困難である。そこでその傾きが簡単に分かるような作図法を開発した。作られた図面に遠近法を入れれば、スキー滑降図は立体的になり更に見やすくなる。

一般に、スキーが滑降する方向 θ と、スキーの長さの方向 δ とは同じではない¹⁾。しかし、 θ と δ が等しい

滑降がカービング・ターン²⁾ と定義されており、この論文では、 $\theta = \delta$ の場合の作図法が述べられている。

2. 作図

2.1. 立方体が投影された衝立上の位置

2.1.1. 図1 (a) のように Y 軸上に、Y 軸に平行に立方体 ($H_1H_2H_3H_4K_1K_2K_3K_4$) と観察点 P を置き、P から立方体を見る。X, Y, Z 軸は互いに垂直である。Z, X 軸を含む面を衝立とする。P から立方体の A_1 を通る直線は衝立と B_1 で交わる。図1 (a) で、衝立を紙面とすれば、紙面上の B_1 を見る事は、空間内で P から A_1 を見る事に相当している。面 ($PA_1A_2A_3A_4$) を図2 (a) のように表す。この図の X 軸は、紙面から手前の方向が正である。正方形の中心 O を ($X=0, Y=0, Z=0$) とする。

1. 愛知スポーツ物理学研究所
〒483-8164 愛知県江南市木賀東町新塚94

1. *Laboratory of Aichi Sports Physics*
94, Shinzuka, Kiga-higashi, Konan, Aichi
(483-8164)

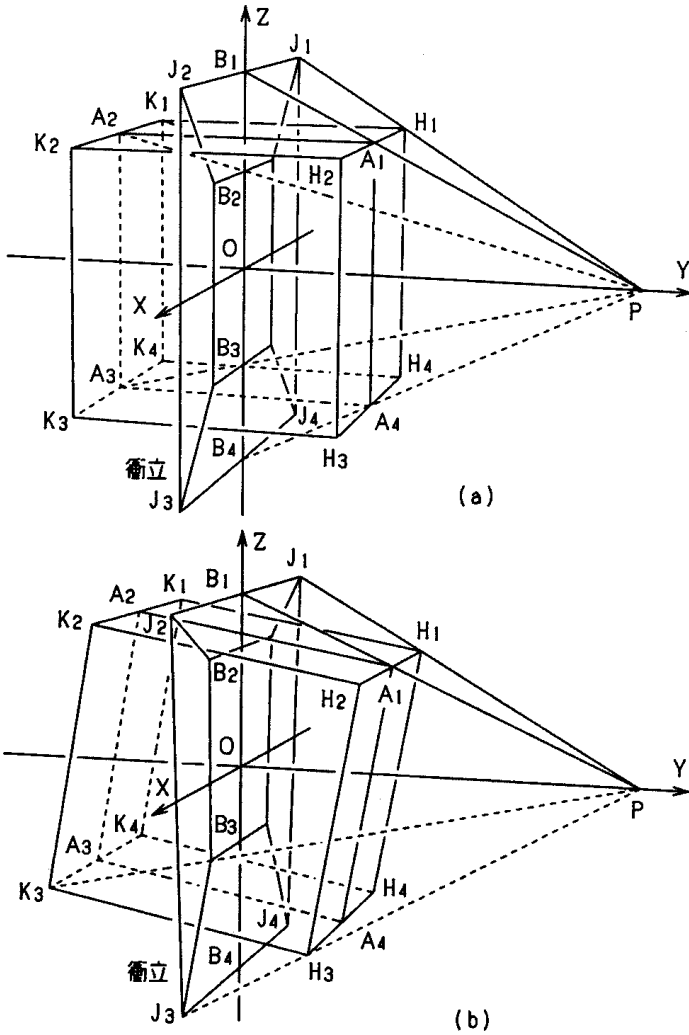


図1. (a) 図形 (立方体) と 衝立 (b) X軸の周りの回転図形

衝立上の位置 $B_1 (X, Y, Z)$ は、

図2 (a) 「Kと位置 $A_1 (X_1, Y_1, Z_1)$ から、 $\tan \phi_1 = Z_1 / (K - Y_1) = Z/K$ 」

を用いると次のようになる。

$$X=0, Y=0, Z=KZ_1 / (K - Y_1) \dots\dots (1)$$

2.1.2 図1 (a) の様に、Pから立方体の隅 H_1 を通る直線は衝立と J_1 で交わる。図1 (a) をZ軸に沿って上から見ると、図2 (b) のようになる。図2 (b) では、Z軸はX, Y軸に垂直で、紙面から手前の方が正である。図1 (a) をX軸に沿って横から見ると、図2 (a) と同じ図が得られる。ただし、 $A_1 (X_1, Y_1, Z_1)$ は $H_1 (X_2, Y_2, Z_2)$ に、 B_1 は J_1 に変わる。

衝立上の位置 $J_1 (X, Y, Z)$ は、

図2 (a) 「Kと位置 $A_1 (X_1, Y_1, Z_1)$ から、 $\tan \phi_1 = Z_1 / (K - Y_1) = Z/K$ 」と

図2 (b) 「Kと位置 $H_1 (X_2, Y_2, Z_2)$ から、 $\tan \phi_2 = X_2 / (K - Y_2) = X/K$ 」と

「 $Y_1 = Y_2, Z_1 = Z_2$ 」を用いると次のようになる。

$$X = KX_2 / (K - Y_2), Y = 0, Z = KZ_2 / (K - Y_2) \dots\dots (2)$$

$X_2 = 0$ の時は式 (2) は式 (1) と同じ式になり、式 (1) は式 (2) に含まれる。

2.2 図形 (立方体) の回転

2.2.1. 数学のテキスト³⁾ は回転による位置の移動を次のように説明している。図2 (c) のようにY, Z面上の点 P_1 が、X軸の周りに右に角 ψ_x だけ回転すると、点 P_1 は点 P_3 に移動する。ここで、 P_1 を固定したまま、Y, Z軸だけを左に ψ_x だけ回転すれば、新しいY', Z'軸は図2 (d) のようになる。図2 (c) の P_3 は、図2 (d) のY', Z'軸からみた P_1 と相対的に同じ位置になる。Y', Z'軸からみた P_1 の位置を $P_1' = P_1' (X_1', Y_1', Z_1')$ とすると、

$$P_1' (X_1', Y_1', Z_1') = P_3 (X_3, Y_3, Z_3)$$

となる。図2 (e) の○印は、Y, Z軸から見れば $P_1 (X_1, Y_1, Z_1)$ であり、Y'Z'軸から見れば $P_1' (X_1', Y_1', Z_1')$ である。 $P_1' (X_1', Y_1', Z_1')$ は、回転する前の $P_1 (X_1, Y_1, Z_1)$ と回転角 ψ_x から、図2 (e) を用いて、次の式で表される。

$$\begin{aligned} X_3 &= X_1' = +X_1, \quad \psi_x > 0^\circ \\ Y_3 &= Y_1' = +Y_1 \cdot \cos \psi_x + Z_1 \cdot \sin \psi_x \\ Z_3 &= Z_1' = -Y_1 \cdot \sin \psi_x + Z_1 \cdot \cos \psi_x \dots\dots (3) \end{aligned}$$

こうして、回転後の (X_3, Y_3, Z_3) は回転前の (X_1, Y_1, Z_1) と回転角 ψ_x で表される。

2.2.2. 図1 (a) の立方体をX軸の周りに角 ψ_x だけ回転する。それが図1 (b) である。回転により、 A_1 の位置が変わり、衝立上の B_1 の位置も変る。図1 (b) の面 $(PA_1A_2A_3A_4)$ を図2 (f) に表す。回転角は ψ_x である。

X軸の周りの回転が図2 (c) であるとする。 P_1 は回転前の図1 (a) の A_1 に対応し、図2 (a) の A_1 に対応している。 P_3 は回転後の図1 (b) の A_1 に対応し、図2 (f) の A_1 に対応している。回転後の図1 (b) の B_1 は図2 (f) の B_1 となる。

衝立上の位置 $B_1 (X, Y, Z)$ は、

図2 (f) 「Kと $A_1 (X_3, Y_3, Z_3)$ から、 $\tan \phi_1 = Z_3 / (K - Y_3) = Z/K$ 」

を用いると次のようになる。

$$X=0, Y=0, Z=KZ_3 / (K - Y_3) \dots\dots (4)$$

式 (3) を使えば、式 (4) は ψ_x と (X_1, Y_1, Z_1) で表される。

図2 (g) は回転後の図1 (b) と図2 (f) をZ軸から見た図である。Z軸から見れば、回転前が図2 (b) で、回転後が図2 (g) である。即ち、回転前の隅 $H_1 (X_2, Y_2, Z_2)$ は回転後に隅 $H_1 (X_4, Y_4, Z_4)$ になる。図1

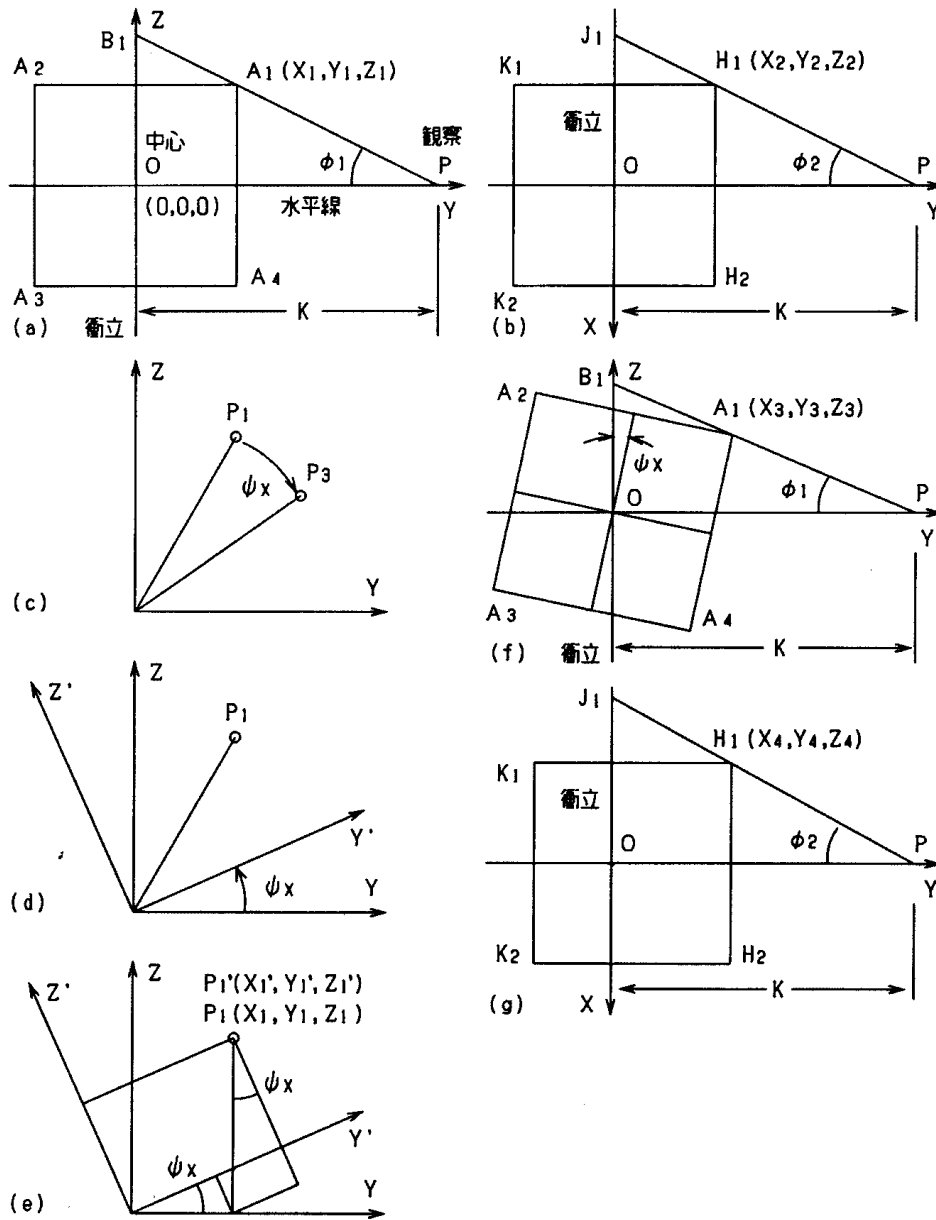


図2. X軸の周りの回転の説明

(b) の J_1 は図 2 (g) の J_1 となる。図 1 (b) を X 軸に沿って横から見ると、図 2 (f) と同じ図が得られる。ただし、 $A_1 (X_3, Y_3, Z_3)$ は $H_1 (X_4, Y_4, Z_4)$ に、 B_1 は J_1 に変る。

衝立上の位置 $J_1 (X, Y, Z)$ は、

図 2 (f) 「 K と位置 $A_1 (X_3, Y_3, Z_3)$ から、 $\tan \phi_1 = Z_3 / (K - Y_3) = Z/K$ と

図 2 (g) 「 K と位置 $H_1 (X_4, Y_4, Z_4)$ から、 $\tan \phi_2 = X_4 / (K - Y_4) = X/K$ と

「 $Y_3 = Y_4, Z_3 = Z_4$ 」を用いると次のようになる。

$$X = KX_4 / (K - Y_4), \quad Y = 0, \quad Z = KZ_4 / (K - Y_4) \dots \dots (5)$$

$X_4 = 0$ の時は式 (5) は式 (4) と同じ式になり、式 (4) は式 (5) に含まれる。図 2 (c) のように「 P_1 は

回転前の座標 (X_1, Y_1, Z_1) , P_3 は回転後の座標 (X_3, Y_3, Z_3) 」を用いれば、式 (5) を、

$$X = KX_3 / (K - Y_3), \quad Y = 0, \quad Z = KZ_3 / (K - Y_3) \dots \dots (6)$$

に変える事ができる。式 (3) を使えば、式 (6) は ψ_x と (X_1, Y_1, Z_1) で表される。

2. 2. 3. 立方体を Y 軸の周りに角 ψ_y だけ回転する。図 1 (a) を Y 軸の方から観察すると、図 3 (a) のようになる。図 3 (a) を Y 軸の周りに回転すると、図 3 (a) は図 3 (b) に変わり、隅 $H_1 (X_1, Y_1, Z_1)$ は隅 $H_1 (X_3, Y_3, Z_3)$ に変る。

Y 軸の周りの回転を図 3 (c) のように描き直す。 P_1 は回転前の隅 $H_1 (X_1, Y_1, Z_1)$ に対応し、 P_3 は回転後の隅 $H_1 (X_3, Y_3, Z_3)$ に対応する。図 3 (d) のように P_1

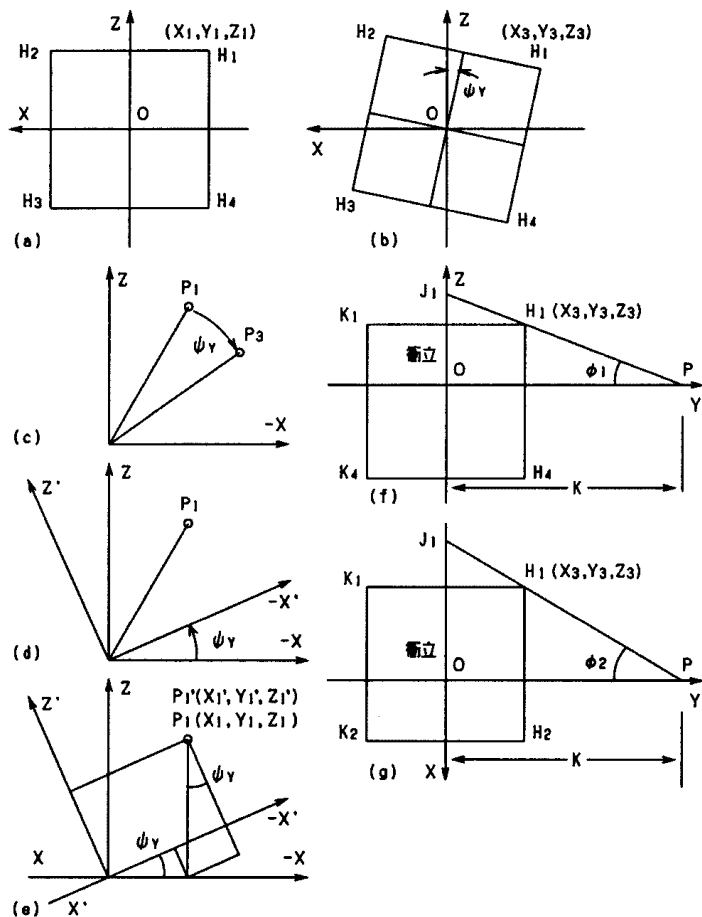


図3. Y軸の周りの回転の説明

を固定し、X, Z軸を ψ_Y だけ回転する。回転後に、X, Z軸はX', Z'軸に変る。図3 (c) のP₃は、図3 (d) のX', Z'軸からみたP₁と相対的に同じ位置になる。X', Z'軸からみたP₁の位置をP₁'=P₁' (X₁', Y₁', Z₁') とすると、

$$P_1' (X_1', Y_1', Z_1') = P_3 (X_3, Y_3, Z_3)$$

となる。図3 (e) の○印は、X, Z軸から見ればP₁ (X₁, Y₁, Z₁) であり、XZ'軸から見ればP₁' (X₁', Y₁', Z₁') である。P₁' (X₁', Y₁', Z₁') は回転する前のP₁ (X₁, Y₁, Z₁) と角 ψ_Y から図3 (e) を用いて、次の式で表される。 $\psi_Y > 0^\circ$ 。

$$\begin{aligned} X_3 &= X_1' = +X_1 \cdot \cos \psi_Y - Z_1 \cdot \sin \psi_Y \\ Y_3 &= Y_1' = +Y_1 \\ Z_3 &= Z_1' = +X_1 \cdot \sin \psi_Y + Z_1 \cdot \cos \psi_Y \dots\dots (7) \end{aligned}$$

こうして、回転後のH₁ (X₃, Y₃, Z₃) は回転前のH₁ (X₁, Y₁, Z₁) と回転角 ψ_Y から得られる。

図3 (f) はY軸の周りに ψ_Y だけ回転した図形をX軸に沿って見た図である。図3 (g) はY軸の周りに ψ_Y だけ回転した図形をZ軸に沿って見た図である。衝立上の位置J₁ (X, Y, Z) は、
図3 (f) 「Kと位置H₁ (X₃, Y₃, Z₃) から、 $\tan \phi_1 = Z_3 / (K - Y_3) = Z_3 / K$ と

図3 (g) 「Kと位置H₁ (X₃, Y₃, Z₃) から、 $\tan \phi_2 = X_3 / (K - Y_3) = X_3 / K$ を用いると次のようになる。

$$X = KX_3 / (K - Y_3), \quad Y = 0, \quad Z = KZ_3 / (K - Y_3) \dots\dots (8)$$

式 (7) を使えば、式 (8) は ψ_Y と (X₁, Y₁, Z₁) で表される。

2.2.4. 立方体をZ軸の周りに角 ψ_Z だけ回転する。図1 (a) をZ軸の方から観察すると図4 (a) のようになる。図4 (a) をZ軸の周りに回転すると、図4 (a) は図4 (b) に変わり、隅H₁ (X₁, Y₁, Z₁) は隅H₁ (X₃, Y₃, Z₃) になる。

Z軸の周りの回転を図4 (c) のように描き直す。P₁ は回転前の隅H₁ (X₁, Y₁, Z₁) に対応し、P₃は回転後の隅H₁ (X₃, Y₃, Z₃) に対応する。図4 (d) のようにP₁ を固定し、X, Y軸を ψ_Z だけ回転する。回転後に、X, Y軸はX', Y'軸に変る。図4 (c) のP₃は、図4 (d) のX', Y'軸からみたP₁と相対的に同じ位置になる。X', Y'軸からみたP₁の位置をP₁'=P₁' (X₁', Y₁', Z₁') とすると、

$$P_1' (X_1', Y_1', Z_1') = P_3 (X_3, Y_3, Z_3)$$

となる。図4 (e) の○印は、X, Y軸から見ればP₁ (X₁, Y₁, Z₁) であり、X'Y'軸から見ればP₁' (X₁', Y₁', Z₁') である。P₁' (X₁', Y₁', Z₁') は回転する前のP₁ (X₁, Y₁, Z₁) と角 ψ_Z から図4 (e) を用いて、次の式で表される。 $\psi_Z > 0^\circ$ 。

$$\begin{aligned} X_3 &= X_1' = +X_1 \cdot \cos \psi_Z + Y_1 \cdot \sin \psi_Z \\ Y_3 &= Y_1' = -X_1 \cdot \sin \psi_Z + Y_1 \cdot \cos \psi_Z \\ Z_3 &= Z_1' = +Z_1 \dots\dots (9) \end{aligned}$$

こうして、回転後のH₁ (X₃, Y₃, Z₃) は回転前のH₁ (X₁, Y₁, Z₁) と回転角 ψ_Z から得られる。

図4 (f) はZ軸の周りに ψ_Z だけ回転した図形をX軸に沿って見た図である。衝立上の位置J₁ (X, Y, Z) は、
図4 (b) 「Kと位置H₁ (X₃, Y₃, Z₃) から、 $\tan \phi_1 = X_3 / (K - Y_3) = X_3 / K$ と

図4 (f) 「Kと位置H₁ (X₃, Y₃, Z₃) から、 $\tan \phi_2 = Z_3 / (K - Y_3) = Z_3 / K$

を用いると次のようになる。

$$X = KX_3 / (K - Y_3), \quad Y = 0, \quad Z = KZ_3 / (K - Y_3) \dots\dots (10)$$

式 (9) を使えば、式 (10) は ψ_Z と (X₁, Y₁, Z₁) で表される。

2.3. 見る高さの変更

図5 (a) のように、Pの位置を水平線上から高さHに移し、衝立を (a-b) から (c-d) に変える。OPと衝立 (c-d) は垂直である。A₁ (X₁, Y₁, Z₁) を見る角 ϕ_1 は、

3. スキー滑降図

3.1. 完成図

図6 (d) は、 $A_1A_2A_3A_4$ を斜(雪)面とし、 $A_3A_4A_5A_6$ を水平面とするスキー場である。斜面上をスキーヤーが片足スキーでカービング・ターン滑降した軌道をSOTとし、点Oで、滑降面の一部を拡大した面を $B_1B_2B_3B_4$ とする。この図は、 $\alpha = 30^\circ$ 、 $\beta = 30^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $FL = 30\text{cm}$ 、 $K = 80\text{cm}$ 、 $H = 0\text{cm}$ により描かれている。図のスキーは滑降方向に沿って、前から見て

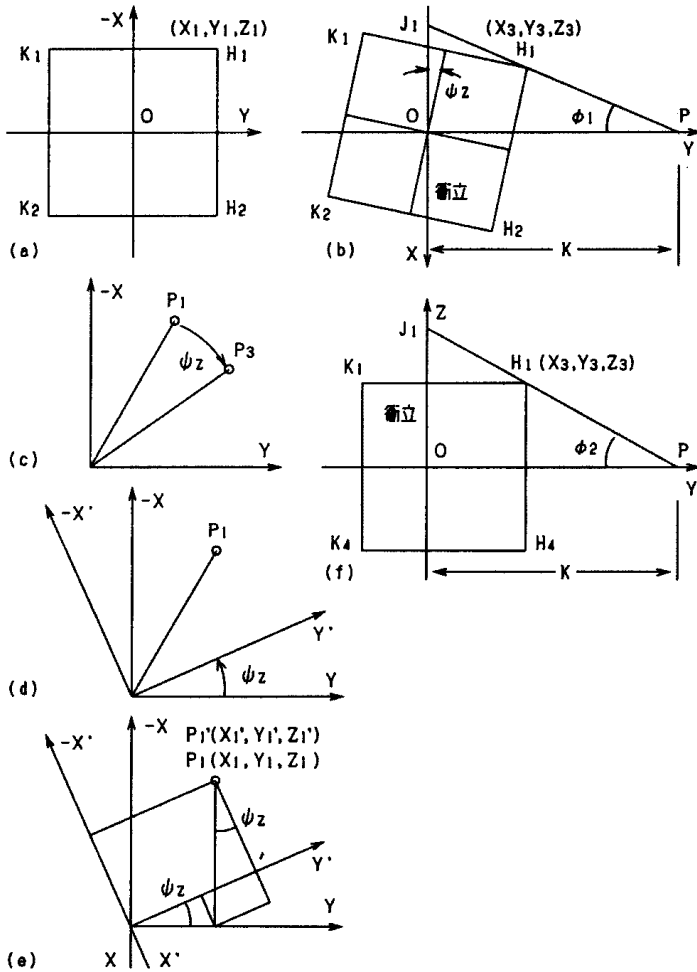


図4. Z軸の周りの回転の説明

$$\phi_1 = \phi_4 - \phi_3$$

で与えられる。ここで、 $\tan \phi_3 = (H - Z_1) / (K - Y_1)$ 、 $\tan \phi_4 = H/K$ である。図5 (a) をX軸の周りに ϕ_4 だけ回転すると図5 (b) となる。ここでOPの大きさを図2 (f) のKと同じにとり ($OP \rightarrow K$)、 ϕ_4 を図2 (f) の ψ_x に等しく描けば、図5 (b) と図2 (f) は同じ図になる。 $\cos \phi_4 = K/OP$ である。見る高さを変える事は、X軸の周りに図形を回転する事と同じである。

2.4. 遠近感

図5 (c) のように、正方形 $A_1A_2A_3A_4$ をPから見た場合に、衝立上の (B_1-B_4) は、衝立の手前の (A_1-A_4) より長くなる。又 (B_2-B_3) は、衝立の向こう側の (A_2-A_3) より短くなる。従って、図形が観察点から遠いか近いかにより、同じ長さの図形でも、衝立上では長さが異なってくる。これが見ている人に遠近感を与える。この衝立上の図面を見れば、人は立体的な図のように感じる。

2.5. 拡大縮小と平行移動

作図において、拡大縮小と平行移動は大切な事柄であるが、ここでは説明を省略する。

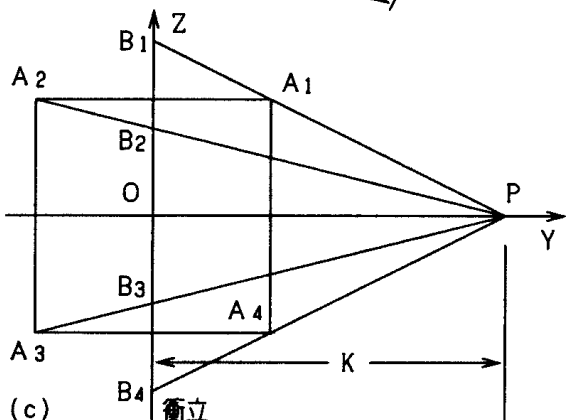
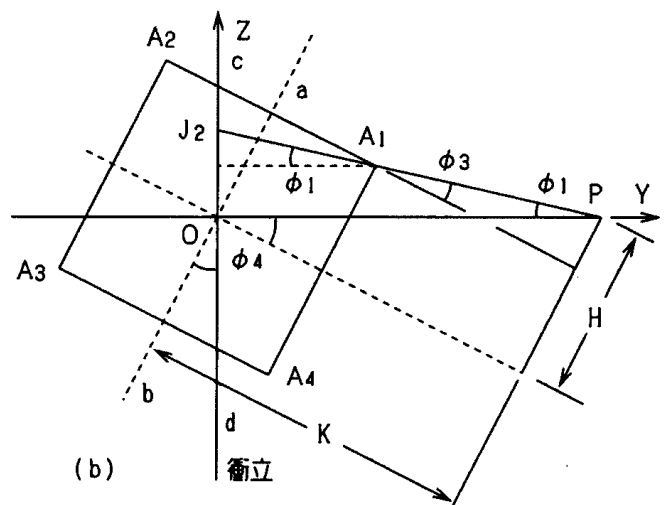
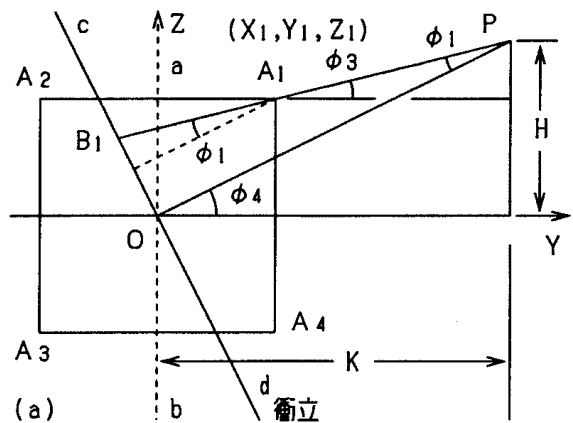


図5. (a) Y軸から離れて見る (b) (a) 図をX軸の周りに回転した図 (c) 遠近法

いる様に描かれている。以下、単位が表示されていない数字はcmである。

3.2 滑降図の組立

図6 (a) は図6 (d) のスキー場を表している。この図は直角3角形であり、 $\angle A_4A_5A_1=90^\circ$ である。図形の隅の座標が計算し易いように、傾斜している斜面を水平面にして描く。これらの座標 (X, Y, Z) は、中心ではO (0,0,0) であり、隅では $A_1 (15, -15, 0)$ 、 $A_2 (-15, -15, 0)$ 、 $A_3 (-15, 15, 0)$ 、 $A_4 (15, 15, 0)$ 、 $A_5 (15, -7.5, -13)$ 、 $A_6 (-15, -7.5, -13)$ である。後で、この図を回転する事により $A_1A_2A_3A_4$ は傾斜角 α の斜面となる。 $A_3A_4A_5A_6$ はスキー場の底面 (水平面) となる。

図6 (a) のスキー場を図のようにZ軸の周りに 90°

回転する場合を考える。Z軸の周りの回転だから式 (9) を用いる。軸の回転角は $\psi_z=90^\circ$ である。図6 (a) の座標を (X_1, Y_1, Z_1) 、図6 (e) の座標を (X_3, Y_3, Z_3) とすると、式 (9) は次式になる。

$$\psi_z = +90^\circ$$

$$X_3 = +X_1 \cdot \cos \psi_z + Y_1 \cdot \sin \psi_z = +Y_1$$

$$Y_3 = -X_1 \cdot \sin \psi_z + Y_1 \cdot \cos \psi_z = -X_1$$

$$Z_3 = +Z_1$$

例えば図6 (a) の $A_1 (15, -15, 0)$ は、図6 (e) では $A_1 (-15, -15, 0)$ となる。

図6 (e) の拡大された滑降面の一部 $B_1B_2B_3B_4$ は、スキーで角付された雪の部分であり、図6 (e) の上に置く。図6 (e) は、見易いように、スキー場と角付けされた部分を少し離して描かれている。角付け角は $\beta =$

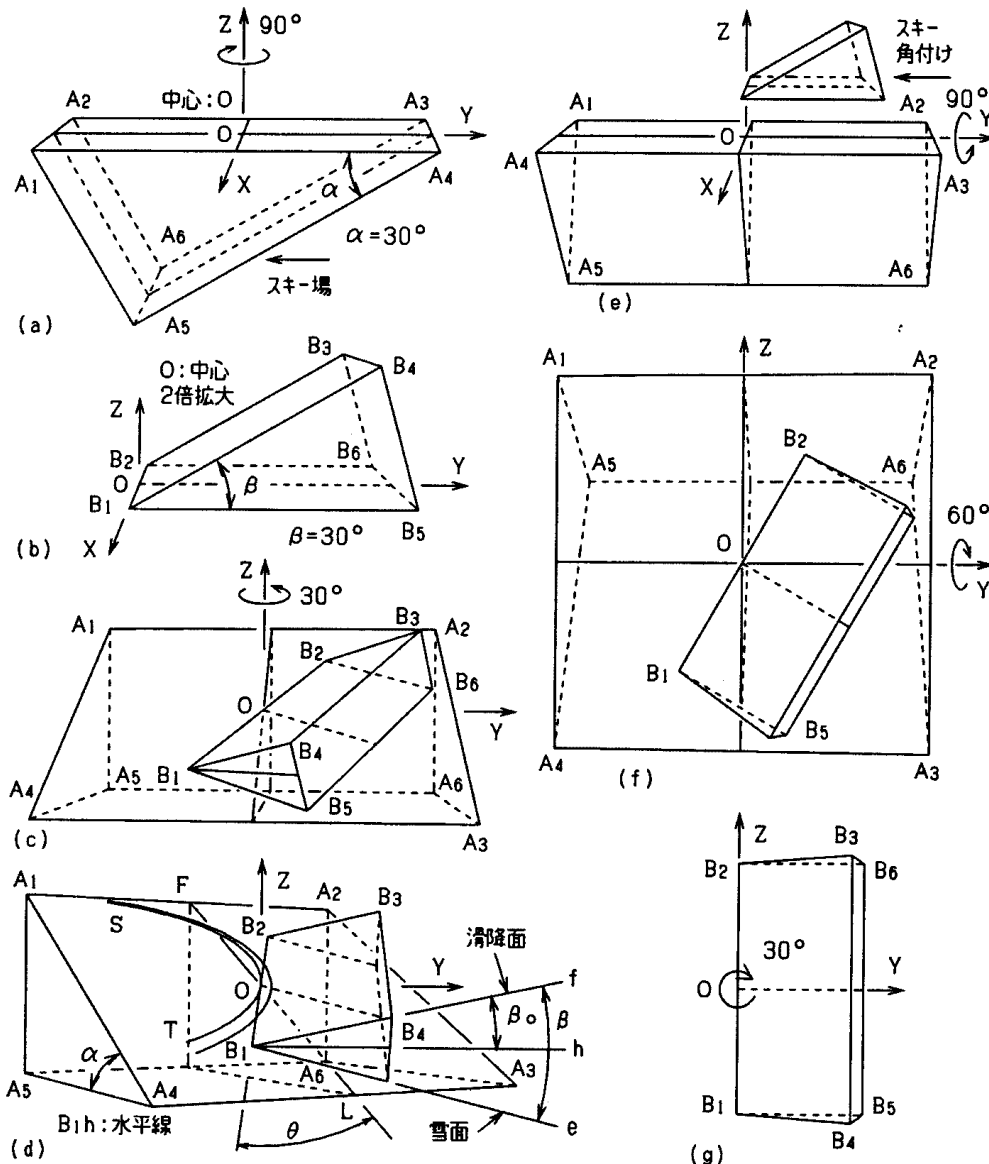


図6. スキー滑降図形の組立